103 - Exemples et applications des notions de sous groupe distingué et de groupe quotient.

G un groupe, H un sous groupe de G

I) Généralités et premiers exemples

1) Sous groupes distingués

Déf groupe distingué et suite exacte [Perrin 11]

Ex : dans un groupe abélien, tous les sg sont distingués.

Ex : Int(G) distingué dans Aut(G) [Delcourt 15] *(faire le calcul en 2 lignes)*

Déf normalisateur. H est distingué dans G ssi le normalisateur de H dans G est G. N_G(H) est le plus grand groupe dans lequel H est distingué [Del 71-72]

Prop : un sg d'indice 2 est distingué [Del 16] *(il y a deux classes à gauche H et gH, et deux classes à droites H et Hg donc gH=Hg)*

Exemple : groupes des rotations dans le groupe diédral.

Prop : le noyau d'un mph de groupe est distingué [Delcourt 14]

ex : An est distingué dans Sn, SLn est distingué dans GLn.

Prop : correspondance bi-univoque entre les sous groupes de G/H et les sous groupes de G [Del 15]

Appl sur les sg de Z/nZ [Del 15]

2) Centre d'un groupe

Déf : centre

Prop : Z(G) est distingué dans G

Exemples : G est commutatif ssi Z(G)=G ; Z(H8), Z(GLn(K)), Z(Sn) [Del 136]

Prop : G/Z monogene ssi G abélien [Del 136] *(si G/Z =<x> alors tout élément de G s'écrit x^k.y ou y est dans le centre, et G est commutatif)*

3) Groupe dérivé

Déf : groupe dérivé comme engendré par les commutateurs [Del 135]

Prop : D(G) distingué dans G [Del 138] *(le conjugué d'un commutateur est un commutateur)*

Exemples : G commutatif ssi D(G)={e} ; D(Sn)=An ; D(An)=An pour n>1 [Del 139] *(on a facilement D(Sn) inclus dans An. On utilise alors que tous 3 cycles sont conjugués dans An pour montrer que tout 3 cycle est un commutateur (ruse : s² conjugué à s))*

Prop : D(G) inclus ds H ssi H distingué dans G et G/H abélien [Del 139] *(si G/H est abélien, la proj canonique envoit D(G) sur le neutre, car f(D(G))=D(f(G))={eH}. Donc D(G) est inclus dans H)*

II) Théorèmes d'isomorphismes

Th : th de factorisation : f :G->G' mph, H distingué dans G. On suppose H inclus dans le noyau. Alors on peut définir f' :G/H->G' tq le diagramme commute [Del 15] *(on raisonne par Cn : on veut que le diagramme commute, donc que f' soit définie, donc que l'image soit la même pour chaque représentant)*

Th : 1er th d'isomph [Del 15] *(th de factorisation avec H=Ker(f))*

Appl : G cyclique implique G isomorphe à Z ou Z/nZ *(l'appl de Z dans G k->x^k a pour noyau {0}, nZ où Z)*

Appl : G/Z isomorphe à Int(G) *(regarder l'appl g->(h->ghg^-1 de noyau Z(G)))*

Appl : isomph exceptionnels [Pe 106]

Th : 2^{e} th d'isomph [Del 15] *(technique de Rémy)*

Appl : cardinal de HK

Th : 3^{e} th d'isomph [Del 16] *(technique de Rémy)*

III) Dévissage et simplicité

1) Simplicité

Déf : groupe simple

Principale application : si G est un groupe simple, tout morphisme de G dans X non trivial est injectif.

Exemples :
- A4 n'est pas simple
- Z/pZ simple ssi p premier

Th : An simple

Th : SO3(R) simple

Th : PSLn(K) simple sauf qlq cas

Th : théorèmes de Sylow [Perrin p.18-19]

Corollaire : s'il y a un unique p-Sylow, il est distingué.

Exemple : un groupe d'ordre pq n'est pas simple [Perrin p.27]

2) Produit semi direct

Def : définition de la loi [FG p.239]

Prop : caractérisation du psd [FG]

Exemples :
- Sn est le psd de An et Z/2Z
- Dn est le psd de Z/nZ et Z/2Z

Appl :
- classification groupes d'ordre 12 [FG 19]
- classification des groupes d'ordre pq [Per 27]

IV) Résolubilité des groupes, théorie de Galois

1) Groupes résolubles [Gozard]

Déf et prop :

Exemples :
- G abélien => G résoluble
- S3 résoluble, S4 aussi, An non pour n>4.
- Matrices triang sup

Prop : G résoluble => tout sg et tout quotient de G est résoluble

Prop : G résoluble ssi H et G/H resolubles

Prop : un groupe d'ordre 105 est tj résoluble

Prop : un p groupe est résoluble (plus précisément, on trouve une suite de groupes d'ordre p^i)

2) Applications en théorie de Galois [Gozard p.138]

Déf : groupe de Galois d'un polynôme sur K [Goz 138] *(c'est le groupe formé des K-automph de L, où L est le corps de décomposition de P)*

Prop : Gal(P) agit fidèlement sur l'ensemble des racines de P [Goz 138] *(un K automorphisme qui fixe toutes les racines fixe L tout entier)*

Csq : le groupe de Galois d'un polynôme de degré n s'identifie à un sous groupe de Sn [Goz 138]

Déf : extension radicale [Goz 174]

Def : résoluble par radicaux [Goz 175] *(si le corps de décomposition de P est inclus dans une extension radicale de K)*

Th : K un corps de caractéristique 0. L'équation P(x)=0 est résoluble par radicaux ssi le groupe de Galois de P est résoluble [Gozard 176] *(gros théorème)*

Ex : le groupe de Galois de X^5-4X+2 est isomorphe à S5, donc non résoluble. [Gozard 178] *(en effet, il a exactement 2 racines non réelles, la conjugaison correspond donc à une transposition, et comme on est dans S5, par Sylow, il existe un élément d'ordre 5 (ie un 5 cycle), donc le groupe de Galois est S5 tout entier. En effet, un lemme dit que si H un sg de Sp contient une transpo et un p-cycle alors H=Sp [Goz 177]).*

Def : une extension L/K est dite normale si elle est algébrique et que tout polynôme irréductible de K[X] qui a une racine dans L a en fait toutes ses racines dans L. Une extension L/K est dite séparable si tout élément de K a un polynôme minimal scindé à racine simple dans L. Une extension normale et séparable est dite galoisienne [Goz 99+126]

Th : (correspondance de Galois) Si L/K est une extension galoisienne de degré finie, alors il y a une correspondance biunivoque entre les sous extension de L et les sous groupe de Gal(L/K). De plus, un sous groupe distingué de Gal(L/K) correspond à une sous extension galoisienne de L [Goz]

Développements :
1 - SO(3) est simple [???] (***)
2 - Groupes d'ordre 12 [FG 19] (**)
3 - An simple [Per 26] (***)

Biblio :
Delcourt
Gozard
Perrin
FG

Rapport Jury 2005-2009 :

Les candidats parlent de groupes simples et de sous-groupe dérivé ou de groupe quotient sans savoir utiliser ces notions. Il faudrait savoir par exemple que- tout morphisme de source un groupe simple est soit injectif soit trivial ;

- dans un groupe simple, toute réunion de classes de conjugaison non triviale engendre le groupe (par exemple les éléments de la forme x^2yx) ;

- tout morphisme d'un groupe G vers un groupe abélien se factorise via Gab :=G/D(G).

La notion de produit semi-direct n'est plus au programme, mais lorsqu'elle est utilisée il faut savoir la définir proprement. Seuls les candidats solides pourront s'y aventurer. La notion de quotient est importante en mathématiques et peut être utilement illustrée dans cette leçon, notamment au travers du sous-groupe dérivé. Des exemples et applications en géométrie élémentaire sont nécessaires.

Il faut bien connaitre le cas du groupe S4, notamment V4 s'injecte dans A4 s'injecte dans S4 et faire le lien avec le tétraèdre. En général le stabilisateur d'un élément n'est pas un sous-groupe distingué, contrairement `a ce que le jury a pu entendre.